

# 近远场统一定位模型： 基于子空间的方法与局限性分析

孙奕髦<sup>1,2</sup>, 徐屹淮<sup>1</sup>, 唐北川<sup>1</sup>, 杨彦兵<sup>1,2</sup>, 陈良银<sup>1,2</sup>

(1. 四川大学计算机学院, 四川成都 610065; 2. 四川大学工业互联网研究院, 四川成都 610065)

**摘要:** 修正极坐标表示 (Modified Polar Representation, MPR) 实现了近场定位与远场测向模型的统一表达, 克服了定位或测向对目标距离先验信息的依赖, 巧妙地规避了传统坐标系下因远场距离模糊及距离-角度相互耦合导致的定位精度下降. 然而现有 MPR 定位方法存在性能和稳健性不足、边界条件不清晰等问题, 无法满足工程应用的实际需求. 本文从子空间的角度着手以求解 MPR 下的时差 (Time Difference Of Arrival, TDOA) 定位问题, 将角度和逆距离的估计分离到两个正交的空间, 从而提高算法性能和稳健性. 首先利用零空间投影消除逆距离以求解角度的最优估计, 然后再代回原方程求解逆距离. 在求解逆距离估计时, 考虑角度估计误差使得矩阵出现秩亏, 可通过向矩阵非零特征值对应的子空间投影解决秩亏的问题, 再由加权最小二乘直接求得逆距离的最优估计. 与现有研究中最优闭式解广义信赖域子问题 (Generalized Trust Region Sub-problem, GTRS) 相比, 分析和仿真实验都证实所提算法具有更好的性能和大噪声场景下的稳健性. 本文还分析了包括所提算法在内的现有基于 MPR 的 TDOA 定位算法的局限性, 明确了不同算法对最小传感器数量和适用场景的要求, 为工程中算法的选择提供参考.

**关键词:** 时差; 定位; 修正极坐标表示; 统一模型; 零空间投影; 子空间投影

**基金项目:** 国家自然科学基金 (No.62101359, No.62272329)

**中图分类号:** TN953.7

**文献标识码:** A

**文章编号:** 0372-2112(2023)08-2134-10

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.12263/DZXB.20230184

## Unified Model for Near and Far Field Localization: Subspace-Based Solution and Limitations Analysis

SUN Yi-mao<sup>1,2</sup>, XU Yi-huai<sup>1</sup>, TANG Bei-chuan<sup>1</sup>, YANG Yan-bing<sup>1,2</sup>, CHEN Liang-yin<sup>1,2</sup>

(1. College of Computer Science, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610065, China;

2. Institute for Industrial Internet Research, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610065, China)

**Abstract:** The modified polar representation (MPR) achieves a unified expression of near-field localization and far-field direction-finding models, overcoming the dependency on prior information of source range for either localization or direction-finding. It cleverly avoids the loss in localization accuracy caused by the range ambiguity and the coupling between range and angle in far field. However, existing MPR localization methods suffer from insufficient performance and robustness, as well as unclear boundary conditions, making them unable to satisfy the requirements of practical engineering applications. This paper addresses the time difference of arrival (TDOA) localization problem in MPR from the perspective of subspaces, separating the estimation of angles and inverse-range into two orthogonal spaces to enhance performance and robustness. We first employ nullspace projection to eliminate inverse-range and obtain the optimal estimation of angles, and then put the result back into the original equation to solve for inverse-range. When solving the inverse range, the matrix is rank-deficient due to the consideration of angle estimation errors. This problem is resolved by projecting the equations onto the subspace corresponding to the non-zero eigenvalues, so the optimal estimation of inverse-range is obtained straightforwardly through weighted least squares. Analysis and simulation experiments demonstrate that the proposed algorithm outperforms the existing best closed-form solution, generalized trust region sub-problem (GTRS), in terms of performance and robustness in high-noise scenarios. This article also analyzes the limitations of existing TDOA localization algorithms based on MPR, including the proposed algorithm. It clarifies the requirements of different algorithms concerning the mini-

mum number of sensors and applicable scenarios, providing references for algorithm selection in engineering applications.

**Key words:** time difference of arrival; localization; modified polar representation; unified model; nullspace projection; subspace projection

**Foundation Item(s):** National Natural Science Foundation of China (No.62101359, No.62272329)

## 1 引言

目标位置感知的研究成果为自动驾驶、人员监控、资产跟踪和应急响应<sup>[1-4]</sup>等提供了广泛的支持. 传统的研究通常将目标位置感知分为近场目标的点定位和远场目标的测向<sup>[5-16]</sup>. 对于点定位, 如果目标距离传感器网络相对较远, 到达传感器的波前几乎是一个平面, 其距离很难分辨, 因而无法估计目标在笛卡尔坐标系中的位置, 这种现象被称为“门限效应”<sup>[17-19]</sup>.

修正极坐标表示 (Modified Polar Representation, MPR) 将目标位置表示为角度和逆距离, 实现了定位和测向模型的统一表征, 即统一模型<sup>[17]</sup>. MPR 不再需要目标位于近场或远场的先验信息以选择对应的模型完成点定位或测向, 从而消除了门限效应. 自 MPR 被首次用于时差 (Time Difference Of Arrival, TDOA) 定位以来, 基于 MPR 建立的统一模型只有几年历史<sup>[18]</sup>. 目前, 解决 MPR 定位问题的研究主要分为两个分支: 凸优化<sup>[18-21]</sup>和闭式解<sup>[22-26]</sup>. 其中闭式解资源消耗少、实现难度低, 因而更具吸引力.

与已经研究了几十年的经典基于笛卡尔坐标系的定位相比, MPR 定位的研究才刚刚迈出了一小步, 还有很多具有挑战性的问题值得深入研究. 先前的研究已经得出结论, 在噪声相对较大时闭式解的估计误差通常大于最大似然估计 (Maximum Likelihood Estimator, MLE) 和基于半定规划 (Semi-Definite Programming, SDP) 的估计方法, 因而现有闭式解算法的定位性能和稳健性仍有改进的空间. 此外, 闭式解往往需要更多的传感器, 其中一些算法甚至对参考站的部署有限制<sup>[22]</sup>, 但对所需的最小传感器数量 (Minimum Number of Sensors, MNS) 和算法的局限性尚没有定量分析.

本文针对 TDOA 的 MPR 定位问题提出了一种新的闭式解, 称为零-子空间投影 (Null-Sub Space Projection, NSSP), 以进一步提高 MPR 定位的性能和稳健性. 所提算法分别利用零空间投影和子空间投影消去方程中的逆距离和解决矩阵的欠秩问题, 从而获得达到克拉美罗下界 (Cramer-Rao Lower Bound, CRLB) 的估计精度, 以及比广义信赖域子问题 (Generalized Trust Region Subproblem, GTRS) 算法<sup>[22]</sup>更好的稳健性. 本文还进一步讨论了包含 NSSP 在内的现有基于 MPR 的 TDOA 定位算法的局限性, 探明了他们对 MNS 的需求和在某些特定场景、目标方向下失效的原因.

本文使用含有上标  $(\bullet)^{\circ}$  的表示其真实值.  $\|\bullet\|$  表示向

量的模,  $(\bullet)^{\circ 2}$  表示向量按元素平方,  $(\bullet)^{\text{T}}$  代表向量或矩阵的转置.

## 2 测量和问题描述

考虑一个由  $M$  个传感器组成的三维传感器网络. 各传感器之间保持时钟同步, 以便获得关于参考传感器, 即第 1 个传感器的  $M-1$  个 TDOA 用于定位目标. 目标信号到第  $i$  个传感器的传播时延可由目标和传感器的位置定义为

$$\tau_i^{\circ} = \frac{\|\mathbf{u}^{\circ} - \mathbf{s}_i\|}{c} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{u}^{\circ}$  是目标在笛卡尔坐标系中的位置,  $\mathbf{s}_i$  是第  $i$  个传感器的笛卡尔坐标,  $c$  是传播速度,  $\mathbf{s}_i$  和  $c$  已知. 时延可以通过乘以  $c$  等效地转换为距离

$$r_i^{\circ} = c\tau_i^{\circ} = \|\mathbf{u}^{\circ} - \mathbf{s}_i\|, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (2)$$

因此, 传感器  $i$  和 1 的 TDOA 等价表示为距离差

$$r_{i1}^{\circ} = r_i^{\circ} - r_1^{\circ} \quad (3)$$

当存在噪声时, 测量的 TDOA 为

$$r_{i1} = r_{i1}^{\circ} + n_{i1}, \quad i = 2, 3, \dots, M \quad (4)$$

将测量的  $M-1$  个 TDOA 写成向量形式, 得到

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^{\circ} + \mathbf{n} \quad (5)$$

其中,  $\mathbf{r} = (r_{21}, r_{31}, \dots, r_{M1})^{\text{T}}$ ,  $\mathbf{r}^{\circ} = (r_{21}^{\circ}, r_{31}^{\circ}, \dots, r_{M1}^{\circ})^{\text{T}}$ ,  $\mathbf{n} = (n_{21}, n_{31}, \dots, n_{M1})^{\text{T}}$ .  $\mathbf{n}$  服从高斯分布, 均值为零, 协方差矩阵为  $\mathbf{Q}$ . 如果目标可能位于远场, 用 MPR 表示目标位置更有优势<sup>[18]</sup>

$$\tilde{\mathbf{u}}^{\circ} = (\theta^{\circ}, \phi^{\circ}, g^{\circ})^{\text{T}} \quad (6)$$

其中,  $\theta^{\circ}$  和  $\phi^{\circ}$  是相对于  $\mathbf{s}_1$  的到达角,  $g^{\circ}$  是逆距离, 定义为  $g^{\circ} = 1/r_1^{\circ}$ . 本文将利用式 (5) 中测量的 TDOA 来估计  $\tilde{\mathbf{u}}$ .

首先构建定位的优化问题. 将式 (3) 重写为  $r_i^{\circ} = r_{i1}^{\circ} + r_1^{\circ}$  并对两边平方, 再将式 (2) 代入以代换  $r_i^{\circ}$  和  $r_1^{\circ}$ , 随后将式 (4) 代入, 经变换后得到

$$\begin{aligned} & -r_{i1} - (\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_1)^{\text{T}} \bar{\mathbf{u}}^{\circ} - \frac{1}{2} [r_{i1}^2 - (\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_1)^{\text{T}} (\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_1)] g^{\circ} \\ & = -r_i^{\circ} g^{\circ} n_{i1} - \frac{g^{\circ}}{2} n_{i1}^2 \end{aligned} \quad (7)$$

其中,  $\bar{\mathbf{u}}^{\circ} = (\mathbf{u}^{\circ} - \mathbf{s}_1)/r_1^{\circ}$  是一个单位向量. 根据文献 [22] 和文献 [25], 其与  $\theta^{\circ}$  和  $\phi^{\circ}$  的关系为

$$\bar{\mathbf{u}}^{\circ} = (\cos \theta^{\circ} \cos \phi^{\circ}, \sin \theta^{\circ} \cos \phi^{\circ}, \sin \phi^{\circ})^{\text{T}} \quad (8)$$

对于全部测量, 由式 (7) 可得到伪线性方程:

$$\mathbf{h}_1 - \mathbf{G}_1 \bar{\mathbf{u}}^{\circ} - \mathbf{a} g^{\circ} = \mathbf{B}_1 \mathbf{n} - \frac{g^{\circ}}{2} \mathbf{n}^{\circ 2} \quad (9)$$

其中,  $\mathbf{h}_1 = -\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{B}_1 = -\mathbf{g}^o \text{diag}(r_2^o, r_3^o, \dots, r_M^o)^T$

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} (\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1)^T \\ (\mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_1)^T \\ \vdots \\ (\mathbf{s}_M - \mathbf{s}_1)^T \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} r_{21}^2 - (\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1)^T (\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) \\ r_{31}^2 - (\mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_1)^T (\mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_1) \\ \vdots \\ r_{M1}^2 - (\mathbf{s}_M - \mathbf{s}_1)^T (\mathbf{s}_M - \mathbf{s}_1) \end{bmatrix} \quad (11)$$

考虑到  $\bar{\mathbf{u}}^o$  的模长为 1, 该定位问题随即被转换为一个具有二次约束的二次优化问题,

$$\min_{\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{g}} (\mathbf{h}_1 - \mathbf{G}_1 \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{a}\mathbf{g})^T \mathbf{W}_1 (\mathbf{h}_1 - \mathbf{G}_1 \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{a}\mathbf{g}) \quad (12)$$

$$\text{s.t. } \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{u}} = 1 \quad (13)$$

其中,  $\mathbf{W}_1 = (\mathbf{B}_1 \mathbf{Q} \mathbf{B}_1^T)^{-1}$ .

### 3 基于投影的代数解

#### 3.1 零空间投影

式(12)、式(13)的优化问题仅约束了  $\bar{\mathbf{u}}$ , 而  $\mathbf{g}$  不受约束. 消除  $\mathbf{g}$  后将得到关于  $\bar{\mathbf{u}}$  的约束优化问题. 与 GTRS<sub>o</sub> 算法<sup>[22]</sup> (算法记为 GTRS<sub>o</sub> 以区分 GTRS 问题) 不同, 本文将使用零空间投影来消除  $\mathbf{g}$ .

令  $\mathbf{V}_1$  表示大小为  $(M-1) \times (M-2)$  的矩阵, 其列为  $\mathbf{a}^T$  零空间的一组正交基, 满足:

$$\mathbf{V}_1^T \mathbf{a} = \mathbf{0}_{M-2} \quad (14)$$

式(14)表明  $\mathbf{V}_1$  可以消除式(9)左侧与  $\mathbf{g}^o$  相关的项. 将式(9)两边左乘  $\mathbf{V}_1^T$  得到方程:

$$\mathbf{h}_2 - \mathbf{G}_2 \bar{\mathbf{u}}^o = \mathbf{B}_2 \mathbf{n} - \frac{\mathbf{g}^o}{2} \mathbf{V}_1^T \mathbf{n}^{o2} \quad (15)$$

其中,

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{V}_1^T \mathbf{h}_1, \quad \mathbf{G}_2 = \mathbf{V}_1^T \mathbf{G}_1, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{V}_1^T \mathbf{B}_1 \quad (16)$$

式(15)可以理解式(9)到  $\mathbf{a}$  零空间的投影. 因此, 式(12)和式(13)定义的优化问题变为

$$\min \mathcal{C}_N(\bar{\mathbf{u}}) = (\mathbf{h}_2 - \mathbf{G}_2 \bar{\mathbf{u}})^T \mathbf{W}_2 (\mathbf{h}_2 - \mathbf{G}_2 \bar{\mathbf{u}}) \quad (17)$$

且满足式(13)的约束, 其中的加权矩阵为  $\mathbf{W}_2 = (\mathbf{B}_2 \mathbf{Q} \mathbf{B}_2^T)^{-1}$ .

由式(13)和式(17)描述的优化问题是典型的 GTRS 问题, 可利用拉格朗日法求解. 构造拉格朗日函数:

$$\mathcal{L}(\bar{\mathbf{u}}, \lambda_1) = (\mathbf{h}_2 - \mathbf{G}_2 \bar{\mathbf{u}})^T \mathbf{W}_2 (\mathbf{h}_2 - \mathbf{G}_2 \bar{\mathbf{u}}) + \lambda_1 (\bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{u}} - 1) \quad (18)$$

令式(18)关于  $\bar{\mathbf{u}}$  的偏导数为零可得

$$\bar{\mathbf{u}}(\lambda_1) = (\mathbf{G}_2^T \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_2 + \lambda_1 \mathbf{I}_N)^{-1} \mathbf{G}_2^T \mathbf{W}_2 \mathbf{h}_2 \quad (19)$$

将式(19)代入式(13)得到

$$\mathbf{h}_2^T \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_2 (\mathbf{G}_2^T \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_2 + \lambda_1 \mathbf{I}_N)^{-2} \mathbf{G}_2^T \mathbf{W}_2 \mathbf{h}_2 = 1 \quad (20)$$

式(20)的变换利用了  $\mathbf{W}_2$  的对称性. 由于  $\mathbf{G}_2^T \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_2$  是正定的, 可通过对角化将其分解为

$$\mathbf{G}_2^T \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_2 = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^T \quad (21)$$

其中的矩阵满足  $\mathbf{P} \mathbf{P}^T = \mathbf{I}_N$ ,  $\mathbf{A} = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_N)^T$ . 可以得到  $(\mathbf{G}_2^T \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_2 + \lambda_1 \mathbf{I}_N)^{-1} = \mathbf{P} (\mathbf{A} + \lambda_1 \mathbf{I}_N)^{-1} \mathbf{P}^T$ , 将其代回式(20)可以化简为一个多项式:

$$1 - \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n^2}{(\beta_n + \lambda_1)^2} = 0 \quad (22)$$

其中,  $\alpha_n$  是  $\mathbf{a} = \mathbf{P}^T \mathbf{G}_2^T \mathbf{W}_2 \mathbf{h}_2$  的第  $n$  个元素. 在式(22)的两边同乘以  $\prod_{n=1}^N (\beta_n + \lambda_1)^2$  可得

$$\sum_{n=0}^{2N} p_n \lambda_1^{n-1} = 0 \quad (23)$$

且  $\lambda_1 \neq -\beta_n, n=1, \dots, N$ . 式(23)是式(22)的分子部分,  $\beta_n$  为式(22)的增根, 使用 MATLAB 或 Python 的相关函数便可求得式(23)的根. 将根代回(19)便可得到估计  $\bar{\mathbf{u}}$ . 关于重根造成的多解问题, 3.2 节的末尾将阐述模糊的消除方法.

#### 3.2 子空间投影

这一小节将利用前面得到的  $\bar{\mathbf{u}}$  来估计  $\mathbf{g}$ . 令估计误差为  $\Delta \bar{\mathbf{u}}^o$ , 它与真值和估计值的关系为

$$\bar{\mathbf{u}}^o = \bar{\mathbf{u}} - \Delta \bar{\mathbf{u}}^o \quad (24)$$

将式(24)代入式(9)可得

$$(\mathbf{h}_1 - \mathbf{G}_1 \bar{\mathbf{u}}) - \mathbf{a}\mathbf{g}^o = \mathbf{B}_1 \mathbf{n} - \mathbf{G}_1 \Delta \bar{\mathbf{u}}^o - \frac{\mathbf{g}^o}{2} \mathbf{n}^{o2} \quad (25)$$

我们需要先计算  $\Delta \bar{\mathbf{u}}^o$  的表达式.

将式(24)代入式(15)可得

$$\mathbf{h}_2 - \mathbf{G}_2 \bar{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\epsilon}_2 - \mathbf{G}_2 \Delta \bar{\mathbf{u}}^o \quad (26)$$

其中,  $\boldsymbol{\epsilon}_2 = \mathbf{B}_2 \mathbf{n} - \frac{\mathbf{g}^o}{2} \mathbf{V}_1^T \mathbf{n}^{o2}$ . 将式(24)代入约束式(13), 结合  $\bar{\mathbf{u}}^{oT} \bar{\mathbf{u}}^o = 1$  并舍弃二阶误差项, 得

$$\bar{\mathbf{u}}^{oT} \Delta \bar{\mathbf{u}}^o = 0 \quad (27)$$

则优化问题(17)变为

$$\min (\boldsymbol{\delta}_2 - \mathbf{G}_2 \Delta \bar{\mathbf{u}})^T \mathbf{W}_2 (\boldsymbol{\delta}_2 - \mathbf{G}_2 \Delta \bar{\mathbf{u}}) \quad (28)$$

$$\text{s.t. } \bar{\mathbf{u}}^{oT} \Delta \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (29)$$

在式(28)、式(29)中,  $\Delta \bar{\mathbf{u}}$  表示  $\Delta \bar{\mathbf{u}}^o$  的优化变量. 此优化问题的拉格朗日函数为

$$\mathcal{L}(\Delta \bar{\mathbf{u}}, \lambda_2) = (\boldsymbol{\delta}_2 - \mathbf{G}_2 \Delta \bar{\mathbf{u}})^T \mathbf{W}_2 (\boldsymbol{\delta}_2 - \mathbf{G}_2 \Delta \bar{\mathbf{u}}) + 2\lambda_2 \bar{\mathbf{u}}^{oT} \Delta \bar{\mathbf{u}} \quad (30)$$

令  $\partial \mathcal{L}(\Delta \bar{\mathbf{u}}, \lambda_2) / \partial \Delta \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ , 可得

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}(\lambda_2) = (\mathbf{G}_2^T \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_2)^{-1} (\mathbf{G}_2^T \mathbf{W}_2 \boldsymbol{\epsilon}_2 - \lambda_2 \bar{\mathbf{u}}^o) \quad (31)$$

代入到约束式(29)中可解得

$$\lambda_2 = \frac{\bar{\mathbf{u}}^{oT} (\mathbf{G}_2^T \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_2)^{-1} \mathbf{G}_2^T \mathbf{W}_2 \boldsymbol{\epsilon}_2}{\bar{\mathbf{u}}^{oT} (\mathbf{G}_2^T \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_2)^{-1} \bar{\mathbf{u}}^o} \quad (32)$$

将式(32)代入式(31)并结合  $\boldsymbol{\epsilon}_2$  的定义可得

$$\Delta \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{S}_1 \boldsymbol{\epsilon}_2 = \mathbf{S}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{n} - \frac{\mathbf{g}^o}{2} \mathbf{S}_1 \mathbf{V}_1^T \mathbf{n}^{o2} \quad (33)$$

其中,

$$\mathbf{S}_1 = (\mathbf{G}_2^T \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_2)^{-1} \left( \mathbf{I}_N - \frac{\bar{\mathbf{u}}^o \bar{\mathbf{u}}^{oT} (\mathbf{G}_2^T \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_2)^{-1}}{\bar{\mathbf{u}}^{oT} (\mathbf{G}_2^T \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_2)^{-1} \bar{\mathbf{u}}^o} \right) \mathbf{G}_2^T \mathbf{W}_2 \quad (34)$$

将式(16)中 $\mathbf{B}_2$ 和式(33)代入式(25)可得

$$(\mathbf{h}_1 - \mathbf{G}_1 \bar{\mathbf{u}}) - \mathbf{a} \mathbf{g}^o = \mathbf{B}_3 \mathbf{n} - \frac{\mathbf{g}^o}{2} \mathbf{C} \mathbf{n}^{o2} \quad (35)$$

其中,

$$\mathbf{B}_3 = \mathbf{C} \mathbf{B}_1 \quad (36)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{I}_{M-1} - \mathbf{G}_1 \mathbf{S}_1 \mathbf{V}_1^T \quad (37)$$

注意到大小为 $(M-1) \times (M-1)$ 的矩阵 $\mathbf{B}_3$ 是秩亏的,可以证明它的秩为 $M-N$ ,无法直接采用加权最小二乘(Weighted Least Squares, WLS)求得 $\mathbf{g}^o$ 的估计.为了处理秩亏的情况,需要将式(35)投影到一个 $M-N$ 维的子空间.对 $\mathbf{C}$ 进行奇异值分解(Singular Value Decomposition, SVD)得到

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_1'] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & \mathbf{O}_{(M-N) \times (N-1)} \\ \mathbf{O}_{(M-N) \times (N-1)}^T & \mathbf{O}_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2^T \\ \mathbf{V}_2'^T \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{U}_1 \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}_2^T \end{aligned} \quad (38)$$

其中, $\boldsymbol{\Sigma}$ 为由 $\mathbf{C}$ 的非零奇异值所构成的对角矩阵, $\mathbf{V}_2$ 是这些非零奇异值所对应的 $\mathbf{C}$ 列空间的正交基,大小为 $(M-1) \times (M-N)$ .式(35)两侧左乘 $\mathbf{V}_2^T$ 得到

$$\mathbf{V}_2^T (\mathbf{h}_1 - \mathbf{G}_1 \bar{\mathbf{u}}) - \mathbf{V}_2^T \mathbf{a} \mathbf{g}^o = \mathbf{V}_2^T \mathbf{B}_3 \mathbf{n} - \frac{\mathbf{g}^o}{2} \mathbf{V}_2^T \mathbf{C} \mathbf{n}^{o2} \quad (39)$$

从而得到 $\mathbf{g}^o$ 的WLS估计:

$$\mathbf{g} = (\mathbf{a}^T \mathbf{V}_2 \mathbf{W}_3 \mathbf{V}_2^T \mathbf{a})^{-1} \mathbf{a}^T \mathbf{V}_2 \mathbf{W}_3 \mathbf{V}_2^T (\mathbf{h}_1 - \mathbf{G}_1 \bar{\mathbf{u}}) \quad (40)$$

加权矩阵 $\mathbf{W}_3$ 的定义为

$$\mathbf{W}_3 = E[\delta_3 \delta_3^T]^{-1} \approx (\mathbf{V}_2^T \mathbf{B}_3 \mathbf{Q} \mathbf{B}_3^T \mathbf{V}_2)^{-1} \quad (41)$$

其中, $\boldsymbol{\epsilon}_3 = \mathbf{V}_2^T \mathbf{B}_3 \mathbf{n} - \frac{\mathbf{g}^o}{2} \mathbf{V}_2^T \mathbf{C} \mathbf{n}^{o2}$ .

需要说明的是,式(23)的多个根将给出多对解 $(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{g})$ ,可通过选择使得最大似然目标函数:

$$\mathcal{J}_{\text{ML}}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{g}) = (\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{g}))^T \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{g})) \quad (42)$$

最小的那一对 $(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{g})$ 作为原问题的解,其中 $\bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{g})$ 是用 $(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{g})$ 重建的距离差,第 $(i-1)$ 个元素的表达式为

$$\bar{r}_{i1} = \frac{1}{g} (\|\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{g}(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_1)\| - 1) \quad (43)$$

最终,MPR下目标的位置估计即为 $(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{g})$ 到 $\tilde{\mathbf{u}}$ 的直接映射:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \left( \tan^{-1} \frac{\bar{u}(2)}{\bar{u}(1)}, \quad \tan^{-1} \frac{\bar{u}(3)}{\|\bar{\mathbf{u}}(1:2)\|}, \quad \mathbf{g} \right)^T \quad (44)$$

### 3.3 性能分析

#### 3.3.1 均方误差

$\bar{\mathbf{u}}^o$ 的估计误差 $\Delta \bar{\mathbf{u}}$ 分析见3.2节式(26)~(34),而 $\mathbf{g}^o$ 的估计误差为

$$\Delta \mathbf{g} = \mathbf{g} - \mathbf{g}^o = \mathbf{S}_2 \mathbf{V}_2^T \mathbf{B}_3 \mathbf{n} - \frac{\mathbf{g}^o}{2} \mathbf{S}_2 \mathbf{V}_2^T \mathbf{C} \mathbf{n}^{o2} \quad (45)$$

其中, $\mathbf{S}_2 = (\mathbf{a}^T \mathbf{V}_2 \mathbf{W}_3 \mathbf{V}_2^T \mathbf{a})^{-1} \mathbf{a}^T \mathbf{V}_2 \mathbf{W}_3$ .

将(44)两侧同时微分,可以得到

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{\mathbf{u}} \\ \Delta \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (46)$$

其中,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\sin \theta^o / \cos \phi^o & \cos \theta^o / \cos \phi^o & 0 \\ -\cos \theta^o \sin \phi^o & -\sin \theta^o \sin \phi^o & \cos \phi^o \end{bmatrix} \quad (47)$$

将式(33)和式(45)代入式(46)得到目标位置在MPR下的估计误差为

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta \phi \\ \Delta \mathbf{g} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Gamma}_1 \mathbf{n} + \boldsymbol{\Gamma}_2 \mathbf{n}^{o2} \quad (48)$$

其中,

$$\boldsymbol{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \mathbf{S}_1 \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{S}_2 \mathbf{V}_2^T \mathbf{B}_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Gamma}_2 = -\frac{\mathbf{g}^o}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \mathbf{S}_1 \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{S}_2 \mathbf{V}_2^T \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (49)$$

因此, $\Delta \tilde{\mathbf{u}}$ 的协方差矩阵为

$$\text{cov}(\tilde{\mathbf{u}}) = E[\Delta \tilde{\mathbf{u}} \Delta \tilde{\mathbf{u}}^T] = \boldsymbol{\Gamma}_1 \mathbf{Q} \boldsymbol{\Gamma}_1^T \quad (50)$$

#### 3.3.2 NSSP与GTRS<sub>o</sub>的比较

零空间投影求解 $\bar{\mathbf{u}}$ 的代价函数与GTRS<sub>o</sub>求解 $\bar{\mathbf{u}}$ 的代价函数可以证明是严格等价的.本文所提出的NSSP在求解 $\mathbf{g}$ 的过程中考虑了第一步 $\bar{\mathbf{u}}$ 的估计误差,因而估计的 $\mathbf{g}$ 更加准确;由于更新的加权矩阵更接近真实值,从而在大噪声情况下能获得更优的估计结果.接下来,本文将证明这种优越性.

我们从逆距离代价函数来比较NSSP和GTRS<sub>o</sub>的精度.GTRS<sub>o</sub>关于 $\mathbf{g}$ 的代价函数为

$$\mathcal{C}_G(\mathbf{g}) = (\mathbf{h}_1 - \mathbf{G}_1 \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{a} \mathbf{g})^T \mathbf{W}_1 (\mathbf{h}_1 - \mathbf{G}_1 \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{a} \mathbf{g}) \quad (51)$$

根据式(39),NSSP在基于子空间的阶段对应的代价函数为

$$\mathcal{C}_N(\mathbf{g}) = (\mathbf{h}_1 - \mathbf{G}_1 \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{a} \mathbf{g})^T \mathbf{V}_2 \mathbf{W}_3 \mathbf{V}_2^T (\mathbf{h}_1 - \mathbf{G}_1 \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{a} \mathbf{g}) \quad (52)$$

式(51)和式(52)所示的代价函数只有中间的加权矩阵不同.

我们生成了 $10^6$ 个场景以比较 $\mathcal{C}_G(\mathbf{g})$ 和 $\mathcal{C}_N(\mathbf{g})$ 的大小.传感器的位置从 $300 \times 300 \times 300 \text{ m}^3$ 的空间区域中按独立均匀分布随机选择.目标的两个角度和距离分别从 $-\pi \sim \pi$ 、 $-\pi/2 \sim \pi/2$ 和 $0 \sim 3000 \text{ m}$ 中随机生成.在每个场景中,我们将噪声功率设为1并测试1000次.定义NSSP与GTRS<sub>o</sub>代价函数之差的度量为 $(\mathcal{C}_G(\mathbf{g}) - \mathcal{C}_N(\mathbf{g})) / (0.5(\mathcal{C}_G(\mathbf{g}) + \mathcal{C}_N(\mathbf{g})))$ ,仿真统计的结果全为正数,即证实 $\mathcal{C}_G(\mathbf{g}) \geq \mathcal{C}_N(\mathbf{g})$ 恒成立.这意味着NSSP能给出更加稳健的解,特别是当噪声很大时.然而,一方面 $\mathcal{C}_G(\mathbf{g})$ 与 $\mathcal{C}_N(\mathbf{g})$ 的差值相比于二者本身的值较小;另一方面考虑到所提NSSP与GTRS<sub>o</sub>关于角度的代价函数等价,因此NSSP的性能在小噪声情况下应该与GTRS<sub>o</sub>相近,这与第5节的仿真结论一致.

## 4 局限性分析

在实际应用中,定位系统通常受到资源的限制,例如计算能力和传感器的数量. 闭式解复杂度低,很好的解决了算力的问题,但无论闭式解或非闭式解,都需要满足方程非欠定的基本条件,因而需要足够数量的传感器. 图1展示了一个有三个传感器的二维定位场景,由TDOA确定了两条双曲线. 在图1(a)中,双曲线的交点是唯一的,而图1(b)中却有两个交点,我们将点 $\mathbf{u}'$ 称为鬼影. 从几何角度上讲, $N+1$ 个传感器不能保证目标的位置有唯一解,因为由TDOA和传感器位置确定的方程是非线性的,但鬼影是否出现取决于传感器的位置布局. 如果传感器部署良好,或者已知目标位置区域的先验知识,那么鬼影则可以被消除.

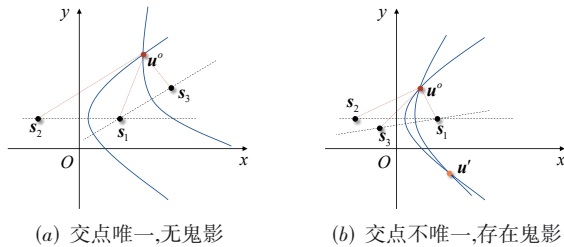


图1 二维情况下最小传感器数量的双曲线定位示例

本节假设鬼影可以通过恰当方法避免,并定义“在数值上正确的估计(Numerically Correct Estimate, NCE)”为“求得的解接近目标位置或者鬼影”,即不存在数值不可解的问题. 下面分别讨论给定算法能否给出NCE的条件,而能确保算法给出NCE的传感器数量称为MNS. 确定MPR下TDOA定位的MNS不像笛卡尔坐标系下的算法那样直观,我们将从代数的角度切入研究,揭示现有算法的MNS. 为了节省符号和方便理解,本节的符号与对应算法的参考文献中使用一致.

### 4.1 最大似然估计

MLE有多种实现方式,其中穷举搜索和迭代法两种将代价函数

$$\mathcal{J}_{\text{MPR}} = \sum_{j=2}^M (r_{j1} - r_{j1}(\hat{\mathbf{u}})) \sum_{i=2}^M q_{ij} (r_{i1} - r_{i1}(\hat{\mathbf{u}})) \quad (53)$$

最小化的方法最受青睐,其中 $r_{j1}(\hat{\mathbf{u}})$ 表示由 $\hat{\mathbf{u}}$ 重建的距离差, $q_{ij}$ 是协方差 $\mathbf{Q}$ 的第*i*行*j*列个元素. 穷举搜索法遍历每个可能的候选组 $(\theta, \phi, g)$ ,以此重构TDOA并选择使得式(53)最小的那一组. 由于*N*条双曲线或双曲面的交集能够唯一确定*N*维平面或空间中的一点,因此穷举搜索法至少需要*N*+1个传感器. 而对于高斯-牛顿法或者牛顿法<sup>[18]</sup>等迭代法,迭代时每次更新的变量大小为*N*×1. 文献[18]中, $\mathbf{G}^{(k)} \in \mathbb{R}^{(M-1) \times N}$ 的秩为 $\text{rank}(\mathbf{G}^{(k)}) = \min\{M-1, N\}$ ,若 $\mathbf{G}^{(k)}$ 列满秩, $\text{rank}(\mathbf{G}^{(k)}) = N$ ,则

$\mathbf{G}^{(k)\text{T}}\mathbf{W}\mathbf{G}^{(k)}$ 可逆,即传感器数量需要满足 $M \geq N+1$ . 因此,迭代法的MNS为*N*+1. 需要注意的是,上述分析假设了搜索区域或选取的初始点都足够接近目标的真实位置,从而避免鬼影,这也是非凸问题穷举法和迭代法常见的基本假设之一.

### 4.2 基于凸优化的解

文献[18]提出的半定松弛(Semi Definite Relaxation, SDR)算法将未知参数的数量扩展到 $2N+3$ 以构造伪线性WLS问题. 类似地,文献[20]的SD/SOCP通过引入额外变量使方程伪线性化,其中未知向量包含了*M*+*N*个元素. 两个算法都增加了MPR位置与额外变量的约束,以确保优化问题存在最优解. 虽然基本思路相似,但SDR和SD/SOCP具有不同的MNS和缺陷.

SDR利用泰勒级数展并舍弃距离比 $R_i/r^{o[18]}$ 二阶以上的项以构造伪线性方程,测量损失较大,因此无法达到CRLB. 而SD/SOCP改进了问题表述的方程,它通过对距离差方程平方得到伪线性方程<sup>[5,7,22,25]</sup>,只忽略了二阶噪声项且没有距离信息的丢失,从而具有CRLB水平的估计精度. 然而,凸松弛处理虽然确保了问题的全局最优点可解,但舍弃秩1约束后的优化问题与原问题不再等价. 此外,增加的额外变量和舍弃的约束也使得凸优化方法需要更多传感器,仿真结果显示,SDR方法至少需要*N*+3个传感器;而SD/SOCP的MNS为*N*+2.

### 4.3 闭式解

#### 4.3.1 逐次非约束最小化

SUM不能处理一些特定的场景,当 $\theta \approx 0, \pm\pi/2$ 或 $\pm\pi$ ,或者 $\phi \approx 0$ 或 $\pm\pi/2$ 时,第二阶段WLS的加权矩阵可能出现秩亏的情况,导致SUM的最终解不准确<sup>[22]</sup>. 另一种特殊情况是各传感器与目标几乎等大等径(Large Equal Radius, LER)场景,在此场景下,TDOA的测量值接近于零,导致文献[22]中的矩阵 $\mathbf{G}_1$ 出现病态,从而使得第一阶段的WLS解极易受到噪声的扰动,因此SUM也无法应对LER场景<sup>[25]</sup>.

由于SUM的第一阶段WLS将 $\boldsymbol{\psi}_1^o$ 视为具有*N*+1个独立元素的向量而忽略了其内部的约束,确定 $\boldsymbol{\psi}_1^o$ 的估计值至少需要*N*+1个方程. 而第二阶段WLS的测量矩阵 $\mathbf{G}_2 \in \mathbb{R}^{(N+1) \times N}$ , $\boldsymbol{\psi}_2^o$ 中的未知数为*N*个,方程总是超定的. 因此SUM的MNS由第一阶段WLS决定,为*N*+2.

#### 4.3.2 广义信赖域子问题

GTRS<sub>0</sub>在*M*=*N*+1时有*N*个方程和一个约束条件,然而这并不满足GTRS<sub>0</sub>解得合理估计的MNS. GTRS<sub>0</sub>的求解要求 $\mathbf{A}^T\mathbf{Q}\mathbf{A}$ 是正定矩阵<sup>[22]</sup>,因此我们首先关注矩阵 $\mathbf{A}^T\mathbf{Q}\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 的秩,有

$$\text{rank}(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}\mathbf{A}) = \min\{\text{rank}(\mathbf{A}), \text{rank}(\mathbf{Q})\} \quad (54)$$

在适当部署了传感器的情况下,当且仅当 $M \geq N+1$ ,有

矩阵  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(M-1) \times N}$  满秩, 其秩为  $\text{rank}(\mathbf{A}) = N$ . 现在需要找出  $\mathbf{\Omega}$  的秩来确定  $\mathbf{A}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{A}$  的秩. 回顾文献[22]的式(46)中  $\mathbf{\Omega}$  表达式:

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_1 \mathbf{a} (\mathbf{a}^T \mathbf{W}_1 \mathbf{a})^{-1} \mathbf{a}^T \mathbf{W}_1 \quad (55)$$

注意到式(55)中的  $\mathbf{W}_1$  是对称正定矩阵, 可被分解为  $\mathbf{W}_1 = \bar{\mathbf{W}}_1 \bar{\mathbf{W}}_1^T = \bar{\mathbf{W}}_1^T \bar{\mathbf{W}}_1$ , 代入式(55)中并令  $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{W}}_1 \mathbf{a}$ , 式(55)可化简为

$$\mathbf{\Omega} = \bar{\mathbf{W}}_1^T \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{a}}}^{\perp} \bar{\mathbf{W}}_1 \quad (56)$$

其中,  $\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{a}}}^{\perp} = \mathbf{I}_{M-1} - \bar{\mathbf{a}} (\bar{\mathbf{a}}^T \bar{\mathbf{a}})^{-1} \bar{\mathbf{a}}^T$  是  $\bar{\mathbf{a}}$  的正交投影矩阵. 由于  $\bar{\mathbf{a}}$  的秩为 1, 则  $\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{a}}}^{\perp}$  的秩为  $M-2$ , 因此,  $\text{rank}(\mathbf{\Omega}) = \min \{\text{rank}(\bar{\mathbf{W}}_1), \text{rank}(\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{a}}}^{\perp})\} = M-2$ . 将结果代入式(54), 可得

$$\text{rank}(\mathbf{A}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{A}) = \min \{N, M-2\} \quad (57)$$

当  $M < N+2$  时,  $\text{rank}(\mathbf{A}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{A}) = M-2 < N$ , 此时  $\mathbf{A}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{A}$  不为正定矩阵. 因此 GTRS 要求传感器数量必须满足  $M \geq N+2$ , 即 GTRS 的 MNS 为  $N+2$ .

#### 4.3.3 逐次约束优化

与 GTRS<sub>0</sub> 不同, SCO 包含了两个阶段, 用于找到约束优化问题的粗解和修正解. 在估计修正量的 SCO 校正阶段, 文献[25]中的式(46)包含了一个隐藏条件, 即  $\mathbf{G}_1^T \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_1 \in \mathbb{R}^{N \times N}$  应可逆. 显然, 如果  $M < N+1$  或者传感器位于一条直线上,  $\mathbf{G}_1^T \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_1$  为奇异矩阵; 而当传感器不共线且  $M \geq N+1$  时,  $\mathbf{G}_1 \in \mathbb{R}^{(M-1) \times N}$  满秩,  $\text{rank}(\mathbf{G}_1) = \min \{M-1, N\} = N$ .

接下来我们关注  $\mathbf{W}_2$ , 其表达式由文献[25]中的式(43)给出:

$$\mathbf{W}_2 = \mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_1 \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_1^T \mathbf{W}_1 \mathbf{v}_1)^{-1} \mathbf{v}_1^T \mathbf{W}_1 \quad (58)$$

这与 GTRS 的  $\mathbf{\Omega}$  相似. 根据前面的分析, 只需要用  $\mathbf{v}_1$  代替  $\mathbf{a}$ , 便可得出  $\mathbf{W}_2$  的秩  $\text{rank}(\mathbf{W}_2) = M-2$ , 进而可得出  $\mathbf{G}_1^T \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_1$  的秩:

$$\begin{aligned} \text{rank}(\mathbf{G}_1^T \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_1) &= \min \{\text{rank}(\mathbf{G}_1), \text{rank}(\mathbf{W}_2)\} \\ &= \min \{N, M-2\} \end{aligned} \quad (59)$$

式(59)的结果由  $N$  和  $M-2$  的关系决定. 由于  $\mathbf{G}_1^T \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_1$  应可逆, 这意味着  $\mathbf{G}_1^T \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_1$  是满秩的, 有  $N \leq M-2$  或  $M \geq N+2$ , 因此 SCO 的 MNS 为  $N+2$ .

#### 4.3.4 零-子空间投影

本文提出的 NSSP 算法采用投影消除不相关的参数, 但也减少了方程的数量. 假设  $M \geq N+1$ , 则  $\mathbf{G}_1 \in \mathbb{R}^{(M-1) \times N}$  为列满秩且秩为  $N$ , 注意到  $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{(M-1) \times (M-1)}$  是对角阵且对角元非零, 因此  $\mathbf{B}_1$  的秩为  $M-1$ . 将  $\mathbf{G}_1$  和  $\mathbf{B}_1$  左乘  $\mathbf{V}_1^T$ , 得到的矩阵  $\mathbf{G}_2$  和  $\mathbf{B}_2$  的大小分别为  $(M-2) \times N$  和  $(M-2) \times (M-2)$ . 由于  $\mathbf{V}_1 \in \mathbb{R}^{(M-1) \times (M-2)}$  的列向量形成了  $\mathbf{a}^T$  零空间, 则  $\text{rank}(\mathbf{V}_1) = M-2$ . 因此有

$$\begin{aligned} \text{rank}(\mathbf{G}_2) &= \min \{\text{rank}(\mathbf{V}_1), \text{rank}(\mathbf{G}_1)\} \\ &= \min \{M-2, N\} \end{aligned} \quad (60)$$

在式(21)中,  $\mathbf{G}_2^T \mathbf{W}_2 \mathbf{G}_2$  要求是正定矩阵以确保对角度是合理的, 所以  $\mathbf{G}_2$  必须是列满秩  $\text{rank}(\mathbf{G}_2) = N$ , 其中必须满足  $M-2 \geq N$ . 综上, NSSP 算法的 MNS 为  $N+2$ .

## 5 仿真

本节采用数值仿真, 通过均方误差 (Mean Square Error, MSE) 和偏差评估所提 NSSP 算法的性能. 对比的算法包括三种闭式解算法 (SUM、GTRS<sup>[22]</sup> 和 SCO<sup>[25]</sup>), 两种凸优化算法 (SDR<sup>[18]</sup> 和 SD/SOCP<sup>[20]</sup>), 以及基于高斯牛顿迭代实现的 MLE, 其初值为 SDR 解. 其中, 凸优化方法 SDR 和 SD/SOCP 都采用 CVX 工具包求解, 求解器为 SDPT3 且求解精度设置为 best. 由于以上解法都是渐近无偏的, 因此可以将 CRLB<sup>[18,22,25]</sup> 作为 MSE 的理论下界用以评估算法的最优性. 假设已知信号传播速度为光速, 时差可转换为距离差, 其测量的协方差矩阵为  $\mathbf{Q} = 0.5\sigma^2 (\mathbf{I}_{M-1} + \mathbf{1}_{M-1} \mathbf{1}_{M-1}^T)^{[7]}$ ,  $\sigma^2$  为噪声方差, 单位为  $\text{m}^2$ .

### 5.1 NSSP 性能评估

传感器网络采用  $M=10$  个传感器, 其位置如表 1 所示. 目标位于  $\theta^o = 52.21^\circ$ ,  $\phi^o = 26.64^\circ$ . 每一个信噪比和距离处测试 5 000 次, 用以计算各算法的均方误差 MSE( $\cdot$ ) 和偏差 Bias( $\cdot$ ).

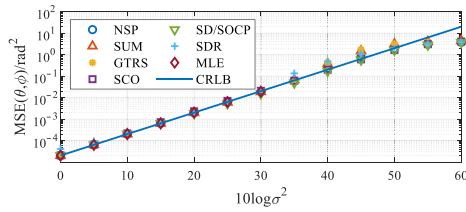
表 1 传感器位置

单位: m

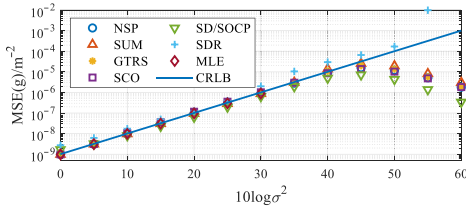
编号	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$
X	0	-116.66	-131.07	-172.67	-187.07
Y	0	65.66	-83.93	60.56	204.54
Z	0	-184.61	162.51	-6.6	54.15
编号	$s_6$	$s_7$	$s_8$	$s_9$	$s_{10}$
X	13.7	-71.49	-187.07	11.31	157.23
Y	117.96	48.3	204.54	-175.02	175.4
Z	97.41	-141.14	54.15	-27.83	-25.59

首先固定目标距离为 2 500 m, 噪声大小从  $1 \text{ m}^2$  增加到  $10^6 \text{ m}^2$ , 仿真结果 MSE 和偏差如图 2、图 3 所示. 除 SDR 外, NSSP 和几种对比算法的角度估计均能够达到 CRLB, 而在噪声大于  $10^{3.5} \text{ m}^2$  时, NSSP 的角度估计精度仍然能够贴近 CRLB, 直到噪声超过  $10^5 \text{ m}^2$ . 当噪声水平超过  $10^3 \text{ m}^2$  后, MLE 遇到了迭代不收敛的问题. SUM 与 GTRS 表现相当, 它们都在噪声超过  $10^{3.5} \text{ m}^2$  后偏离了 CRLB. SD/SOCP 出现了估计 MSE 略低于 CRLB 的情况, 这是因为其偏差较大, 这一点在偏差结果中得到了证实. 本文所提 NSSP 算法的 MSE 是最优的.

在图 3 所示的偏差中, NSSP 与 MLE 的角度估计偏差相当, 它的逆距离估计偏差在小噪声情况下甚至比 MLE 还要低约 12 dB. 具有类似水平逆距离偏差的 GTRS, 在噪声较大时, 角度估计的偏差出现了比较明



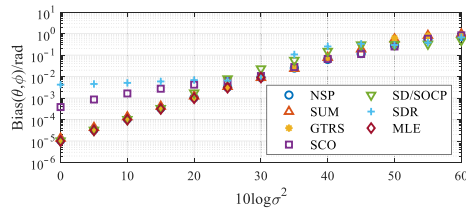
(a) 角度估计MSE随噪声的变化



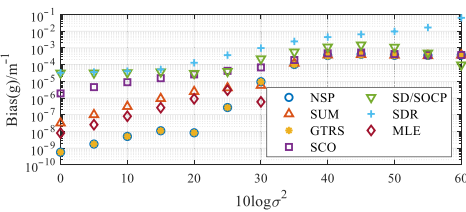
(b) 逆距离估计MSE随噪声的变化

图2 角度和逆距离估计MSE随噪声的变化

显的增加. SCO虽然在MSE的性能与NSSP一致,但它在噪声较小时的偏差是几种闭式解算法中最大的,其角度估计的偏差超过了SD/SOCP,仅优于SDR. 需要注意的是,由于SDR和SD/SOCP都是将原问题经过凸松弛后得到的,其解本身并非原问题的解,尽管SD/SOCP增加了约束并在获得解后重新对秩1约束进行了处理,二者仍然有较大的偏差,特别是在逆距离的估计中.



(a) 角度估计估计偏差随噪声的变化

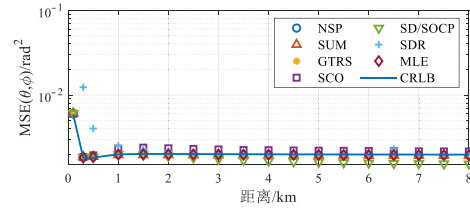


(b) 逆距离估计估计偏差随噪声的变化

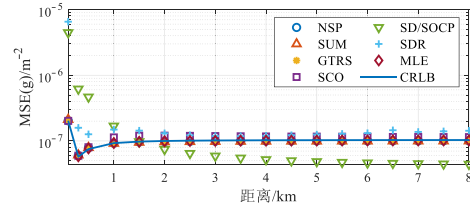
图3 角度和逆距离估计估计偏差随噪声的变化

接下来评估各算法随距离增加的性能表现. 固定测量噪声为 $\sigma^2 = 10^2 \text{ m}^2$ ,目标距离从100 m增加到8 000 m,其他参数保持不变. MSE和偏差的仿真结果如图4、图5所示. 正如我们所期望的,所有算法均基于MPR,它们不会随着距离的增加而出现文献[18~25]中所示的笛卡尔坐标中的门限效应,再一次证实了MPR的优

越性. 本文所提出的NSSP算法与其他闭式解算法一样,MSE能达到与MLE相当的水平. 由于设置的噪声较小,NSSP没有表现出明显的性能差异. SD/SOCP的精度虽然能够接近CRLB,但角度和逆距离的估计都随着距离的增加逐渐偏离了CRLB. SDR由于约束不紧无法达到CRLB. 此外,SD/SOCP和SDR的偏差明显高于闭式解算法和迭代算法,原因与图3相同.

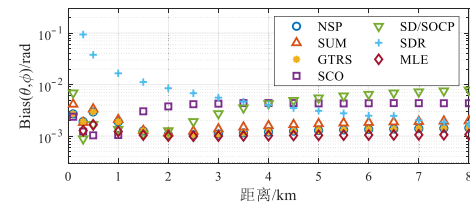


(a) 角度估计MSE随目标距离的变化

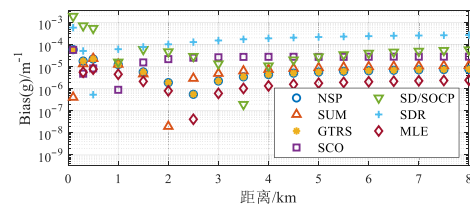


(b) 逆距离估计MSE随目标距离的变化

图4 角度和逆距离估计MSE随目标距离的变化



(a) 角度估计偏差随目标距离的变化



(b) 逆距离估计偏差随目标距离的变化

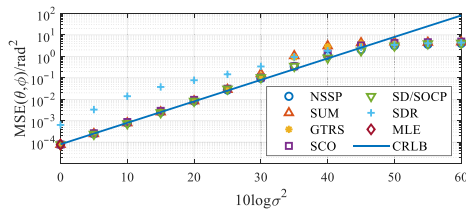
图5 角度和逆距离估计偏差随目标距离的变化

## 5.2 MNS验证

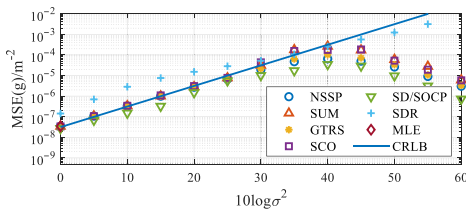
为了验证第4节对现有算法MNS的分析,分别选取表1中的前6(即前 $N+3$ )个、前5(即前 $N+2$ )个和前4(即前 $N+1$ )个传感器( $N=3$ ),进行仿真实验,蒙特卡洛试验次数为1 000次,其他设置和图2、图3相同.

当传感器数量为6时,所有的方法都能给出合理的

解, MSE 的结果与图 2 类似, 如图 6 所示. 其中, SD/SOCP 的逆距离估计误差几乎无法达到 CRLB. 和前面的分析一样, 这是由于松弛的近似性造成的, 当传感器数量较少时, 这种近似的误差变得不可忽略, 对逆距离估计的影响尤其明显.



(a) 具有  $N+3$  个传感器时角度估计的 MSE

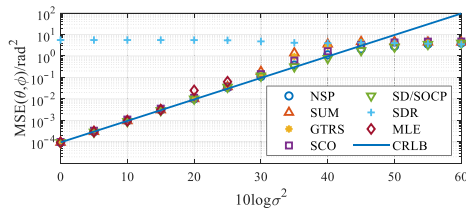


(b) 具有  $N+3$  个传感器时逆距离估计的 MSE

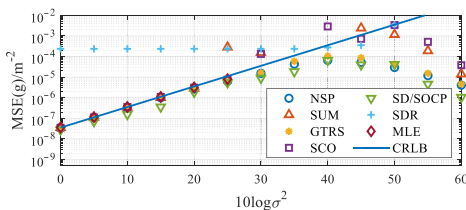
图 6 具有  $N+3$  个传感器时各算法角度和逆距离估计的 MSE

当传感器数量为 5 时, 仿真结果如图 7 所示. 由于 SDR 对角度和逆距离的估计均无法给出合理的解, 因此 MLE 由 SD/SOCP 作为初值. 与所分析的一致, 传感器数量为 5 时, 图 7 所示的结果表明 SDR 已经无法给出合理的估计. 此时的 MNS 正好满足其他方法的要求, 它们 MSE 表现与图 6 的结果相似.

当传感器数量为 4 时, NSSP、SUM、GTRS、SCO 均由于其计算过程中遭遇了矩阵秩亏导致的不可逆或不可



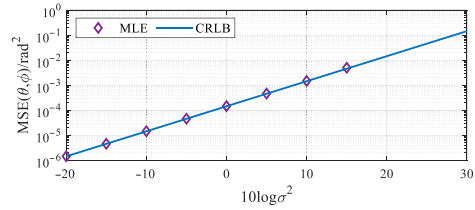
(a) 具有  $N+2$  个传感器时角度估计的 MSE



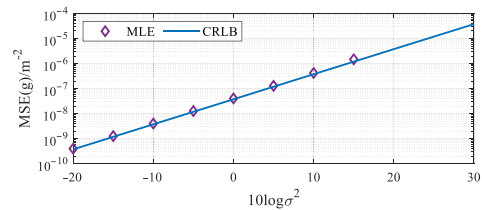
(b) 具有  $N+2$  个传感器时逆距离估计的 MSE

图 7 具有  $N+2$  个传感器时各算法角度和逆距离估计的 MSE

合理分解, 无法在数值仿真中顺利计算. 而 SDR 和 SD/SOCP 虽然能给出一个数值解, 但此时的解已经是无效的了, 因为传感器数量已经小于其 MNS 的要求. 此时, 如果有一个恰当的初始值, MLE 解出的角度和逆距离都可以达到 CRLB, 如图 8 所示.



(a) 具有  $N+1$  个传感器时角度估计的 MSE



(b) 具有  $N+1$  个传感器时逆距离估计的 MSE

图 8 具有  $N+1$  个传感器时各算法角度和逆距离估计的 MSE

### 5.3 关于 MSE 低于 CRLB 的分析

我们注意到, 在图 2、图 6 和图 7 的仿真中, 均出现了 MSE 低于 CRLB 的情况. 经过分析, 我们发现造成这种现象的原因如下:

(1) CRLB 描述的是无偏估计量方差的理论下界, 不适用于有偏估计. 本文提出的 NSSP 方法是一个渐近无偏估计. 当噪声较大时,  $\hat{\mathbf{u}}$  的估计偏差显著增大而不可忽略, 此时 CRLB 不再适用于对  $\hat{\mathbf{u}}$  估计性能的评估, 导致其 MSE 小于 CRLB<sup>[27,28]</sup>.

(2) MPR 下的 TDOA 定位问题是一个非凸非线性的优化问题, 因此, 本文所提的 NSSP 方法在推导求解的过程中, 进行了近似, 忽略了高阶误差项, 导致所求解的问题和原问题不等价. 随着噪声的增大, 由近似产生的误差越来越明显, 使得 MSE 低于 CRLB. 不同方法因近似处理而忽略的误差项不同, 因此出现低于 CRLB 的情况也不尽相同, 仿真结果也证实了这一推论.

(3) 除 MLE 外, 包含 NSSP 和对比算法在内的 6 种算法都没有直接估计  $\theta$  和  $\phi$ , 而是估计中间变量  $\hat{\mathbf{u}}$ , 再利用四象限反正切函数 atan2 来实现式 (44) 中从  $\hat{\mathbf{u}}$  到  $\theta$  和  $\phi$  的一一映射. 但这样的映射增加了  $-\pi < \theta < \pi, -\pi < \phi < \pi$  的先验知识, 使得结果为贝叶斯估计量. 根据文献[29]第 10.3 节的内容可知, 当 TDOA 的方差较大时, 贝叶斯估计所使用的先验知识, 会使得估计量的 MSE 小于 CRLB.

(4)NSSP算法涉及到多项式求根,式(23)的根可能出现不合理的复数解,丢弃后可能会没有实根而导致仿真意外中断.此时,程序会将复数根的实部作为解继续计算.随着噪声的增大,解出的复数根也会增多,经过这种处理的估计结果也会越来越多,因而也会使得MSE偏离CRLB.

## 6 结论

本文聚焦于MPR坐标下的定位问题,提出了一种基于子空间投影的TDOA定位算法零-子空间投影(NSSP).对NSSP的理论性能分析证实了算法具有优秀的估计精度,与GTRS代价函数的比较也证实了其在噪声较大的情况下具有更好的性能.本文还分析了现有基于MPR的TDOA定位算法的局限性,阐述了各算法的几何限制和所需传感器的最小数量.NSSP算法为MPR在非法无人机监测、自动化农场设备定位、大型智能仓库无人车监控以及远程预警等应用提供了一种更优的位置估计;而对现有算法适用范畴和局限性的结论将更好地为不同应用场景下工程实践的选择提供理论依据.

## 参考文献

- [1] WIN M Z, MEYER F, LIU Z Y, et al. Efficient multisensor localization for the Internet of things: Exploring a new class of scalable localization algorithms[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2018, 35(5): 153-167.
- [2] CONTI A, MAZUELAS S, BARTOLETTI S, et al. Soft information for localization-of-things[J]. Proceedings of the IEEE, 2019, 107(11): 2240-2264.
- [3] ZHANG P F, NAGARAJAN S G, NEVAT I. Secure location of things (SLOT): Mitigating localization spoofing attacks in the Internet of things[J]. IEEE Internet of Things Journal, 2017, 4(6): 2199-2206.
- [4] KUUTTI S, FALLAH S, KATSAROS K, et al. A survey of the state-of-the-art localization techniques and their potentials for autonomous vehicle applications[J]. IEEE Internet of Things Journal, 2018, 5(2): 829-846.
- [5] CHAN Y T, HO K C. A simple and efficient estimator for hyperbolic location[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(8): 1905-1915.
- [6] YANG L, HO K C. An approximately efficient TDOA localization algorithm in closed-form for locating multiple disjoint sources with erroneous sensor positions[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(12): 4598-4615.
- [7] HO K C. Bias reduction for an explicit solution of source localization using TDOA[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(5): 2101-2114.
- [8] WANG Y, HO K C. An asymptotically efficient estimator in closed-form for 3-D AOA localization using a sensor network[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2015, 14(12): 6524-6535.
- [9] NGUYEN N H, DOGANCA Y K, KURUOGLU E E. An iteratively reweighted instrumental-variable estimator for robust 3-D AOA localization in impulsive noise[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2019, 67(18): 4795-4808.
- [10] JIA T Y, HO K C, WANG H Y, et al. Effect of sensor motion on time delay and Doppler shift localization: Analysis and solution[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2019, 67(22): 5881-5895.
- [11] WANG Q L, ZHAO Z Q, CHEN Z M, et al. Grid evolution method for DOA estimation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2018, 66(9): 2374-2383.
- [12] SUN F G, WU Q H, LAN P, et al. Real-valued DOA estimation with unknown number of sources via reweighted nuclear norm minimization[J]. Signal Processing, 2018, 148: 48-55.
- [13] CUI X X, YU K G, LU S S. Approximate closed-form TDOA-based estimator for acoustic direction finding via constrained optimization[J]. IEEE Sensors Journal, 2018, 18(8): 3360-3371.
- [14] 王鼎, 尹洁昕, 刘瑞瑞, 等. 同步时钟偏差存在下的时差定位性能分析及改进的定位方法[J]. 电子学报, 2018, 46(6): 1281-1288.  
WANG D, YIN J X, LIU R R, et al. Performance analysis and improvement for TDOA source localization in the presence of synchronization clock bias[J]. Acta Electronica Sinica, 2018, 46(6): 1281-1288. (in Chinese)
- [15] 王鼎, 尹洁昕, 郑娜娥, 等. 信号传播速度未知下基于运动单站到达频率的定位新方法[J]. 电子学报, 2022, 50(5): 1181-1191.  
WANG D, YIN J X, ZHENG N E, et al. A FOA-based localization method for moving single station under unknown signal propagation speed[J]. Acta Electronica Sinica, 2022, 50(5): 1181-1191. (in Chinese)
- [16] WEN F Q. Computationally efficient DOA estimation algorithm for MIMO radar with imperfect waveforms[J]. IEEE Communications Letters, 2019, 23(6): 1037-1040.
- [17] 孙奕髦. 近远场统一模型及病态问题下的单/多站定位方法研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2019.  
SUN Y M. Single/Multiple Station Localization Method

Research in Unified Near-Far-Field Model and Ill-Conditioned Matrix Situation[D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2019. (in Chinese)

- [18] WANG Y, HO K C. TDOA positioning irrespective of source range[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(6): 1447-1460.
- [19] WANG Y, HO K C. Unified near-field and far-field localization for AOA and hybrid AOA-TDOA positionings[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2018, 17(2): 1242-1254.
- [20] WANG G, HO K C. Convex relaxation methods for unified near-field and far-field TDOA-based localization[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2019, 18(4): 2346-2360.
- [21] QI H N, WU X P, JIA L Q. Semidefinite programming for unified TDOA-based localization under unknown propagation speed[J]. IEEE Communications Letters, 2020, 24(9): 1971-1975.
- [22] SUN Y M, HO K C, WAN Q. Solution and analysis of TDOA localization of a near or distant source in closed form[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2019, 67(2): 320-335.
- [23] SUN Y M, HO K C, WAN Q. Algebraic solution for TDOA localization in modified polar representation[C]// ICASSP 2019 - 2019 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). Piscataway: IEEE, 2019: 4380-4384.
- [24] SUN Y M, ZHANG F R, WAN Q. Wireless sensor network-based localization method using TDOA measurements in MPR[J]. IEEE Sensors Journal, 2019, 19(10): 3741-3750.
- [25] SUN Y M, HO K C, WANG G, et al. Computationally attractive and location robust estimator for IoT device positioning[J]. IEEE Internet of Things Journal, 2022, 9(13): 10891-10907.
- [26] SUN Y M, HO K C, WAN Q. Eigenspace solution for AOA localization in modified polar representation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2020, 68: 2256-2271.
- [27] LOHRASBIPEYDEH H, GULLIVER T A, AMINDAVAR H. A minimax SDP method for energy based source localization with unknown transmit power[J]. IEEE Wireless Communications Letters, 2014, 3(4): 433-436.
- [28] LOHRASBIPEYDEH H, GULLIVER T A. RSSD-based MSE-SDP source localization with unknown position esti-

mation bias[J]. IEEE Transactions on Communications, 2021, 69(12): 8416-8428.

- [29] KAY S M. 统计信号处理基础:估计与检测理论[M]. 罗鹏飞, 张文明, 译. 北京: 电子工业出版社, 2014.

### 作者简介



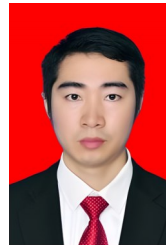
**孙奕髦** 男, 1990年9月出生于四川省德阳市. 2019年毕业于电子科技大学信息与通信工程学院. 现为四川大学计算机学院特聘副研究员、硕士生导师. 从事无线传感网、目标定位、参数估计等方面的研究. 中国电子学会会员: E190016838M.  
E-mail: yimaosun@scu.edu.cn



**徐屹淮** 男, 2000年7月生于四川省阿坝藏族羌族自治州. 现为四川大学计算机学院硕士研究生. 主要研究方向为可见光定位、室内定位技术.  
E-mail: yihuaixu@stu.scu.edu.cn



**唐北川** 男, 2001年3月出生于四川省南充市. 现为四川大学计算机学院硕士研究生. 主要研究方向为参数估计、定位技术.  
E-mail: tbc@stu.scu.edu.cn



**杨彦兵** 男, 1987年3月出生于四川省绵阳市. 2010年6月和2013年6月于电子科技大学分别获得工业工程学士和电子与通信工程硕士学位, 2017年12月获新加坡南洋理工大学计算机科学与工程博士学位. 现为四川大学副研究员、博士生导师, 物联网工程系副主任. 从事智能感知与通信、通信感知一体化、物联网、嵌入式人工智能方面的研究工作. 中国电子学会会员: E190025922M.  
E-mail: yangyanbing@scu.edu.cn



**陈良银** 男, 1968年3月出生于重庆市. 2008年于四川大学计算机学院取得博士学位. 现为四川大学计算机学院教授. 从事物联网系统及安全、工业互联网、智能识别、大数据分析、区块链、传感网方面的研究工作.  
E-mail: chenliangyin@scu.edu.cn